

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 3 dei quesiti del questionario. Il problema vale 5,25 e i tre quesiti valgono 3,75

Problema 1

Considera i numeri complessi $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$, $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

- 1) Trova z_3 in forma algebrica e trigonometrica.
- 2) Scrivi z_1 e z_2 in forma trigonometrica. Rappresenta i tre punti sul piano di Gauss.
- 3) Dai punti precedenti spiega come è possibile ricavare i valori di $\cos \frac{\pi}{12}$ e $\sin \frac{\pi}{12}$.
- 4) Trova le radici quadrate di z_1
- 5) Scrivi in forma algebrica il numero z_2^{20}
- 6) Determina in forma algebrica i corrispondenti di z_1 e z_3 in una rotazione di centro O e angolo di ampiezza $\frac{\pi}{6}$.

Problema 2

E' data l'equazione $z^2 - kz + 3 - 1 = 0$.

- 1) Trova il valore di $k \in \mathbb{C}$ in modo che una delle sue soluzioni sia $z_1 = 1 - i$.
- 2) In corrispondenza di tale valore di K trova anche la soluzione z_2 in forma algebrica e trigonometrica.
- 3) Trova le radici quadrate di z_2
- 4) Scrivi z_1^{15} in forma algebrica
- 5) Trova $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ e scrivilo in forma algebrica e trigonometrica.
- 6) Determina perimetro e area del triangolo AOB dove O è l'origine degli assi e A e B i punti sul piano di Gauss corrispondenti di z_1 e z_2

Questionario

1) Posto che $\ln x$ indichi il logaritmo di x in base e , risulta

$$\sqrt{\ln^2 x + 2 \ln x + 1} = \ln x + 1$$

per tutti e soli gli x reali tali che:

- A) $x \geq 0$ B) $x \geq 1$ C) $x \geq e$ D) $x \geq \frac{1}{e}$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2) Data in campo complesso la disequazione $2 \operatorname{Re} z - 2 \operatorname{Im} z \geq z \cdot \bar{z}$ scegliere tra le seguenti affermazioni quella corretta motivando la risposta:

- a) essa rappresenta sul piano complesso una figura illimitata
- b) essa rappresenta sul piano complesso un semipiano
- c) essa rappresenta sul piano complesso una figura di area pari a 2π
- d) essa rappresenta sul piano complesso l'insieme vuoto

3) Un geometra deve fornire la misura esatta dell'area di un appezzamento di terreno avente la forma di un quadrilatero convesso, di cui può **misurare la distanza tra due vertici qualsiasi**. Quale procedimento può seguire per determinare l'area ?

4) Trovare le radici quinte dell'unità e rappresentarle sul piano di Gauss.

5) Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = e^{-2x}$? Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante ?