

1. Dopo aver dimostrato che è applicabile il teorema di Lagrange alla funzione

$f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$ nell'intervallo $[1; 5]$ si trovi il punto(o i punti) la cui esistenza è garantita dal teorema. (1,5)

2. Stabilisci se alla seguente funzione è applicabile il teorema di Rolle nell'intervallo indicato e perché e in caso affermativo trovare il punto x_0 la cui esistenza è garantita dal teorema: (1,25)

$$f(x) = \ln^2 x - 2 \ln x \quad \text{in } [e^{-1}; e^3]$$

3) Data la funzione: (1,25+1)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} & \text{per } x < -1 \\ x^2 + a & \text{per } -1 \leq x < 1 \\ bx e^{x-1} + c & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

trovare a e b in modo che la funzione risulti continua per $x = -1$ e derivabile per $x = 1$. Con i valori a e b trovare l'equazione della retta tangente alla funzione nel punto $x = 1$

4) Trovare le derivate delle funzioni: (1+0,5)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{2x - \sin(2x)}{4}$$

Si verifichi poi che le due curve hanno, in punti di uguale ascissa, rette tangenti tra loro perpendicolari. (cioè il prodotto dei coefficienti angolari è uguale a -1)

5) Data la funzione $y = \frac{2-3x}{2x+1}$ determinare le ascisse dei punti, se esistono, in cui la tangente al grafico della funzione è parallela alla retta $x+7y-5=0$ (1,5)

6) In figura è rappresentato il grafico della funzione $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} \ln x$. Analizza algebricamente i punti di discontinuità della funzione e specifica il tipo di discontinuità. Trova poi le tangenti nel punto $x=1$ della funzione che può essere ottenuta con un prolungamento per continuità. (1)

